Discrete Mathematics 103 (1992) 99–101
North-Holland

Note

Une bijection entre arbres binaires et certaines matrices de Jacobi

J.M. Pallo

Département d'Informatique, Université de Dijon, B.P. 138-21004 Dijon Cedex, France

Received 10 May 1989

Abstract

Pallo, J.M., Une bijection entre arbres binaires et certaines matrices de Jacobi, Discrete Mathematics 103 (1992) 99–101.

We establish a one-to-one correspondence between the set of binary trees with n internal nodes and the set of integral triple diagonal matrices of order n which are unimodular, positive definite, and whose sub and super diagonal elements are all one. The cardinality of these two sets is just the nth Catalan number.

1. Introduction

Considérons l'ensemble S_n des matrices carrées d'ordre n de la forme:

$$td(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & & & & \\ 1 & a_2 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & a_{n-1} & 1 \\ & & & & 1 & a_n \end{bmatrix}$$

qui sont unimodulaires, définies positives et dont les éléments a_i de la diagonale principale sont des entiers positifs. Leighton et Newman ont démontré un résultat surprenant [2] sur ces matrices de Jacobi particulières [1, p. 99]: la cardinalité de S_n est le n eme nombre de Catalan: $\binom{2n}{n}/(n+1)$. Adoptant la même démarche que dans [4], on établit ici une bijection entre ces matrices et les arbres binaires.

2. Arbres binaires

Dans un arbre binaire (enraciné et ordonné) tout sommet différent de la racine a un ascendant. Tout sommet interne ○ a deux descendants: un gauche et un droit. Tout sommet externe ou feuille □ n'a pas de descendant. On note B_n l'ensemble des arbres binaires à n sommets internes (donc à $n+1$ feuilles). Les feuilles d'un arbre sont numérotées de 1 à $n+1$ par un parcours de l'arbre en préordre. On note d_{ij} le nombre de sommets internes sur l'unique chemin reliant les feuilles i et j.

Définition 1. Si $t \in B_n$, on appelle D-suite de l'arbre t la suite des n nombres entiers: $d_t = (d_{12}, d_{23}, \ldots, d_{n,n+1})$.

Une telle suite est un codage de t dans le sens où on peut montrer que d_t détermine t de façon unique.

Exemples.

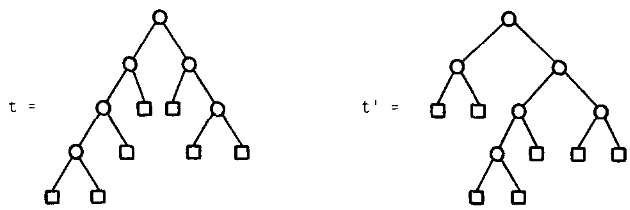
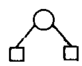


Fig. 1. $d_t = (1, 2, 2, 3, 2, 1)$, $d_{t'} = (1, 5, 1, 2, 3, 1)$.

Définition 2. On appelle réduction d'une suite s d'entiers positifs l'opération qui consiste à remplacer dans la suite s une sous-suite de la forme $(s_{k-1}, 1, s_{k+1})$ par la sous-suite $(s_{k-1}-1, s_{k+1}-1)$.

Caractérisation. *Une suite de n entiers positifs d est la D-suite d'un arbre de B_n ssi il existe n réductions successives de d qui permettent d'obtenir la suite formée de l'unique élément* 1.

Preuve. On remarquera que réduire une D-suite d_t revient à remplacer dans t une occurrence de  par □. □

3. La bijection

Théorème. *La suite d'entiers positifs* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *est la D-suite d'un arbre de* B_n *ssi* $td(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in S_n$.

Preuve. On utilisera aisément les lemmes 2 et 3 de [4]. $\square$

4. Prolongements

A tout arbre $t \in B_n$ on peut associer la matrice d'ordre n $D_t = [d_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$. On démontrera ultérieurement, que pour t et $t' \in B_n$, les conditions suivantes sont équivalentes:

(1) t et t' sont isomorphes,

(2) les pôlynomes caractéristiques de D_t et $D_{t'}$ sont identiques,

(3) $\det(D_t) = \det(D_{t'})$.

Soit C_n l'ensemble-quotient de B_n par la relation d'équivalence d'isomorphisme entre arbres enracinés. Un élément de C_n est un arbre binaire non-ordonné. Si $T \in C_n$, les n valeurs propres réelles de D_t où $t \in T \cap B_n$ constitueront donc un codage de T.

Bibliographie

[1] F.R. Gantmacher, The Theory of Matrices, Vol. 2 (Chelsea, New York, 1960).

[2] F.T. Leighton and M. Newman, Positive definite matrices and Catalan numbers, Proc. Amer. Math. Soc. 79 (1980) 177–181.

[3] M. Newman, Integral Matrices (Academic Press, New York, 1972).

[4] E.J.F. Primrose, A correspondence between two Catalan sets, Discrete Math. 65 (1987) 313–315.